M1 MEEF 2014-2015

Correction du Devoir Maison
Equations Différentielles, Espaces Vectoriels Normés,
Calcul Différentiel et Statistique

Solution de l'exercice 1.

Un exercice de physique classique que vous avez probablement déjà rencontré. Plusieurs méthodes sont ici possibles. Naturellement celle imposée passait par un système différentiel, et la réduction de la matrice associée pour le résoudre. J'espère que vous avez pu apprécier cette mise en contexte de la méthode où son utilité y apparaît plus concrètement. Nous discuterons à la fin d'une autre méthode ad hoc.

1. Commençons par exprimer la force de Lorentz en fonction des données du problème.

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \vec{F}(t) = q\vec{M}'(t) \wedge \vec{B} + q\vec{E} = qB \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q\vec{E}.$$

Grâce au rappel,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -(x_1y_3 - x_3y_1) \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit dans notre cas que,

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \vec{F}(t) = qB \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -y_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} + q\vec{E}.$$

Or par le principe fondamental de la dynamique, on sait que

$$\forall t \geqslant 0, \qquad m\vec{M}''(t) = \vec{F}(t).$$

Dont on déduit que, (la masse est non nulle naturellement)

$$\forall t \geqslant 0, \qquad Y'(t) = \vec{M}''(t) = \frac{1}{m}\vec{F}(t) = \frac{qB}{m} \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -y_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{q}{m}\vec{E}.$$

Or on vérifie aisément que,

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -y_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi en posant,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \frac{q}{m}\vec{E},$$

et en rappelant que $\omega = \frac{qB}{m}$, on trouve bien que,

$$\forall t \geqslant 0, \qquad Y'(t) = \omega AY(t) + C.$$

2. L'ensemble $\mathscr{C}^1([0;+\infty[,\mathbb{R}^3)$ est un espace vectoriel, montrons que $\mathscr{S}$ en est un sous-espace vectoriel. Par définition $\mathscr{S}$ est inclus dans $\mathscr{C}^1([0;+\infty[,\mathbb{R}^3)$. On vérifie facilement qu'il contient la fonction nulle et donc qu'il est non vide. Soient λ_1 et λ_2 deux réels et Y_1 et Y_2 deux solutions de
$$\forall t \geqslant 0, \qquad Y'(t) = \omega A Y(t). \tag{1}$$
Alors la fonction $Z = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$ est dérivable (puisque dans $\mathscr{C}^1([0;+\infty[,\mathbb{R}^3)$) et sa dérivée vaut,
$$\forall t \geqslant 0, \qquad Z'(t) = \lambda_1 Y_1'(t) + \lambda_2 Y_2'(t).$$
Puisque Y_1 et Y_2 sont solutions de (1),
$$\forall t \geqslant 0, \qquad Z'(t) = \lambda_1 \left(\omega A Y_1(t)\right) + \lambda_2 \left(\omega A Y_2(t)\right) = \omega A \left(\lambda_1 Y_1(t) + \lambda_2 Y_2(t)\right) = \omega A Z(t).$$
Dont on déduit que Z est aussi solution de (1) et est donc dans $\mathscr{S}$. Ainsi $\mathscr{S}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1([0;+\infty[,\mathbb{R}^3)$
3. D'après le théorème de Cauchy-lipschitz, un système différentiel d'ordre 1 avec une condition initiale admet une et une seule solution : pour tout vecteur $Y_0 \in \mathbb{R}^3$ il existe une unique fonction Y vérifiant,
$$\begin{aligned} \forall t \geqslant 0, \qquad & Y'(t) = \omega A Y(t), \\ \text{et} \qquad & Y(0) = Y_0. \end{aligned}$$
L'application φ est clairement une application linéaire : soient λ_1 et λ_2 deux réels et Y_1 et Y_2 deux éléments de $\mathscr{S}$. Alors
$$\varphi\left(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2\right) = \left(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2\right)(0) = \lambda_1 Y_1(0) + \lambda_2 Y_2(0) = \lambda_1 \varphi\left(Y_1\right) + \lambda_2 \varphi\left(Y_2\right).$$
Soit Y_0 un élément de $\mathbb{R}^3$ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe Y dans $\mathscr{S}$ tel que $\varphi(Y) = Y(0) = Y_0$. Donc tout élément de $\mathbb{R}^3$ admet un antécédent par φ et φ est surjective. Enfin pour deux solutions Y_1 et Y_2 de $\mathscr{S}$ telles que $\varphi(Y_1) = \varphi(Y_2)$, alors en notant cet élément de $\mathbb{R}^3$, $Y_0 = \varphi(Y_1) = \varphi(Y_2)$ nous savons que Y_1 et Y_2 sont deux solutions du même problème de Cauchy, notamment avec même condition initiale. Donc par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on conclut que $Y_1 = Y_2$ et que φ est aussi injective. Finallement φ est un isomorphisme entre $\mathscr{S}$ et $\mathbb{R}^3$.
4. On en déduit directement de la question précédente que $\dim(\mathscr{S}) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$.
5. Pour montrer que A est diagonalisable, le plus simple est encore de calculer son polynôme caractéristique,
$$\det\,(A - XI_3) = \det\begin{pmatrix} -X & 1 & 0 \\ -1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & -X \end{pmatrix} = -X \det\begin{pmatrix} -X & 1 \\ -1 & -X \end{pmatrix} = -X\left(X^2+1\right).$$
Les racines sont 0, i et $-i$ et le polynôme est scindé à racines simples (dans $\mathbb{C}$!) donc A est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$). Plus précisément elle est semblable à la matrice diagonale suivante,
$$D = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Pour déterminer la matrice de changement de base il nous faut calculer les vecteurs propres associés. Naturellement le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la valeur propre 0. Pour i

et $-i$, on peut résoudre le système sans trop se fatiguer. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de i si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & ix \\ -x & = & iy \\ 0 & = & iz \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & ix \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Notamment $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à i. De même $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $-i$. D'où $A = PDP^{-1}$ avec,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. On pose $\forall t \geqslant 0$, $Z(t) := P^{-1}Y(t)$. Cette fonction Z est un élément de $\mathscr{C}^1([0;+\infty[,\mathbb{R}^3)$ et est notamment dérivable. Puisque P^{-1} est une matrice constante et que Y est solution de $\omega AY(t) + C$, on a

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \begin{aligned} Z'(t) = P^{-1}Y'(t) &= \omega P^{-1}AY(t) + P^{-1}C \\ &= \omega P^{-1}PDP^{-1}Y(t) + P^{-1}C \\ &= \omega DZ(t) + P^{-1}C. \end{aligned} \tag{2}$$

Ici puisque l'on a un second membre C, on doit calculer l'inverse de P. Bien entendu les différentes méthodes sont possibles. Par la formule de la comatrice,

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} {}^t\begin{pmatrix} -i & -i & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} = \frac{1}{-2i} \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

De cette façon le système précédent s'écrit encore,

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \begin{aligned} \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \end{pmatrix} &= \omega \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{q}{m} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \\ &= \omega \begin{pmatrix} iz_1(t) \\ -iz_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{q}{2m} \begin{pmatrix} E_x - iE_y \\ E_x + iE_y \\ 2E_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc « découplé » les équations, $\forall t \geqslant 0$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_1'(t) & = & i\omega z_1(t) + \frac{q}{2m}(E_x - iE_y) \\ z_2'(t) & = & -i\omega z_2(t) + \frac{q}{2m}(E_x + iE_y) \\ z_3'(t) & = & \frac{q}{m}E_z. \end{array} \right.$$

Toutes ces équations sont résolues, linéaires, d'ordre 1 et même à coefficients constants. On connait les solutions. Par exemple pour z_1 les solutions de l'équation homogène sont $C_1\,\mathrm{e}^{i\omega t}$ où C_1 est une constante dans $\mathbb{C}$. Puis on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre. Par exemple une solution constante $t \mapsto c$, alors $0 = i\omega c + \frac{q}{2m}(E_x - iE_y)$

d'où $t \mapsto \frac{iq}{2m\omega}(E_x - iE_y)$ est une solution particulière. Donc, en rappelant que $\omega = \frac{qB}{m}$, les solutions z_1 sont,

$$\exists C_1 \in \mathbb{C}, \forall t \geqslant 0, \qquad z_1(t) = C_1 \mathrm{e}^{i\omega t} + \frac{i}{2B}(E_x - iE_y).$$

De même pour z_2, les solutions sont,

$$\exists C_2 \in \mathbb{C}, \forall t \geqslant 0, \qquad z_2(t) = C_2 \mathrm{e}^{-i\omega t} + \frac{-i}{2B}(E_x + iE_y).$$

Quant à z_3 naturellement,

$$\exists C_3 \in \mathbb{C}, \forall t \geqslant 0, \qquad z_3(t) = \frac{q}{m}E_z t + C_3.$$

On résume que Z est une solution (complexe) de (2) si et seulement s'il existe C_1, C_2 et C_3 dans $\mathbb{C}$ tels que,

$$\forall t \geqslant 0, \qquad Z(t) = \begin{pmatrix} C_1 \mathrm{e}^{i\omega t} + \frac{i}{2B}(E_x - iE_y) \\ C_2 \mathrm{e}^{-i\omega t} + \frac{-i}{2B}(E_x + iE_y) \\ \frac{q}{m}E_z t + C_3 \end{pmatrix}.$$

7. On en déduit directement les solutions complexes du système initiale, $\forall t \geqslant 0$,

$$Y(t) = PZ(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \mathrm{e}^{i\omega t} + \frac{i}{2B}(E_x - iE_y) \\ C_2 \mathrm{e}^{-i\omega t} + \frac{-i}{2B}(E_x + iE_y) \\ \frac{q}{m}E_z t + C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \mathrm{e}^{i\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-i\omega t} + \frac{E_y}{B} \\ iC_1 \mathrm{e}^{i\omega t} - iC_2 \mathrm{e}^{-i\omega t} - \frac{E_x}{B} \\ \frac{q}{m}E_z t + C_3 \end{pmatrix}.$$

Cherchons maintenant les solutions réelles. Si Y est réelle alors bien entendu $\overline{Y} = Y$. Donc,

$$\overline{Y(t)} = \begin{pmatrix} \overline{C_1} \mathrm{e}^{-i\omega t} + \overline{C_2} \mathrm{e}^{i\omega t} + \frac{E_y}{B} \\ -i\overline{C_1} \mathrm{e}^{-i\omega t} + i\overline{C_2} \mathrm{e}^{i\omega t} - \frac{E_x}{B} \\ \frac{q}{m}E_z t + \overline{C_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \mathrm{e}^{i\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-i\omega t} + \frac{E_y}{B} \\ iC_1 \mathrm{e}^{i\omega t} - iC_2 \mathrm{e}^{-i\omega t} - \frac{E_x}{B} \\ \frac{q}{m}E_z t + C_3 \end{pmatrix}.$$

Or on sait que $t \mapsto \mathrm{e}^{i\omega t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-i\omega t}$ ne sont pas colinéaires et forment une famille libre de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^1([0;+\infty[,\mathbb{C}^3)$. Nécessairement, $C_2 = \overline{C_1}$ et $C_3 \in \mathbb{R}$. Donc en posant $C_1 = \frac{C_4 - iC_5}{2}$ avec C_4 et C_5 deux constantes réelles,

$$\begin{aligned} \forall t \geqslant 0, \qquad Y(t) &= \begin{pmatrix} \frac{C_4 - iC_5}{2} \mathrm{e}^{i\omega t} + \frac{C_4 + iC_5}{2} \mathrm{e}^{-i\omega t} + \frac{E_y}{B} \\ i\frac{C_4 - iC_5}{2} \mathrm{e}^{i\omega t} - i\frac{C_4 + iC_5}{2} \mathrm{e}^{-i\omega t} - \frac{E_x}{B} \\ \frac{q}{m}E_z t + C_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_4 \frac{\mathrm{e}^{i\omega t} + \mathrm{e}^{-i\omega t}}{2} + C_5 \frac{\mathrm{e}^{i\omega t} - \mathrm{e}^{-i\omega t}}{2i} + \frac{E_y}{B} \\ -C_4 \frac{\mathrm{e}^{i\omega t} - \mathrm{e}^{-i\omega t}}{2i} + C_5 \frac{\mathrm{e}^{i\omega t} + \mathrm{e}^{-i\omega t}}{2} - \frac{E_x}{B} \\ \frac{q}{m}E_z t + C_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_4 \cos(\omega t) + C_5 \sin(\omega t) + \frac{E_y}{B} \\ -C_4 \sin(\omega t) + C_5 \cos(\omega t) - \frac{E_x}{B} \\ \frac{q}{m}E_z t + C_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

C'est peut-être un peu laborieux mais il n'y a rien de théoriquement difficile dans ces trois dernières lignes. Une autre façon de faire est (et c'est un peu près la même chose) de dire que $\mathrm{Im}(Y) = 0$, d'en déduire les relations sur les coefficients et de déterminer Y dans ce cas. Notez bien que les solutions y_1 et y_2 sont liées du fait de l'apparition des mêmes constantes C_4 et C_5 dans leurs expressions. Vous avez pu trouvez des solutions avec un 2 ou un signe $-$

devant des constantes, cela n'est pas incompatible puisque l'on peut modifier les constantes par exemple on pose $\tilde{C}_4 = \frac{C_4}{2}$ et on obtient,

$$\forall t \geqslant 0, \qquad Y(t) = \begin{pmatrix} 2\tilde{C}_4 \cos(\omega t) + C_5 \sin(\omega t) + \frac{E_y}{B} \\ -2\tilde{C}_4 \sin(\omega t) + C_5 \cos(\omega t) - \frac{E_x}{B} \\ \frac{q}{m} E_z t + C_3 \end{pmatrix}.$$

8. Rappelons que $Y(t) = M'(t)$. Il nous suffit donc simplement d'intégrer. Il existe C_6, C_7 et C_8 trois constantes réelles telles que,

$$\forall t \geqslant 0, \qquad M(t) = \begin{pmatrix} \frac{C_4}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{C_5}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{E_y}{B} t + C_6 \\ \frac{C_4}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{C_5}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{E_x}{B} t + C_7 \\ \frac{q}{2m} E_z t^2 + C_3 t + C_8 \end{pmatrix}.$$

En posant $C_4' = \frac{C_4}{\omega}$ et $C_5' = \frac{C_5}{\omega}$, on obtient,

$$\forall t \geqslant 0, \qquad M(t) = \begin{pmatrix} C_4' \sin(\omega t) - C_5' \cos(\omega t) + \frac{E_y}{B} t + C_6 \\ C_4' \cos(\omega t) + C_5' \sin(\omega t) - \frac{E_x}{B} t + C_7 \\ \frac{q}{2m} E_z t^2 + C_3 t + C_8 \end{pmatrix}.$$

9. Grâce aux conditions initiales, on détermine les constantes,

$$M(0) = \begin{pmatrix} -C_5' + C_6 \\ C_4' + C_7 \\ C_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M'(0) = Y(0) = \begin{pmatrix} \omega C_4' \\ \omega C_5' \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

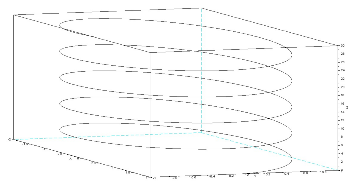
On en déduit que,

$$\begin{cases} C_3 &= 1 \\ C_4' = C_7 = C_8 &= 0 \\ C_5' &= \frac{1}{\omega} \\ C_6 &= 1 + \frac{1}{\omega}. \end{cases}$$

D'où,

$$\forall t \geqslant 0, \qquad M(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) + 1 + \frac{1}{\omega} \\ \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Dans le plan xOy la trajectoire est un cercle de centre $\left(1 + \frac{1}{\omega}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{\omega}$ car $\left(x(t) - \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)\right)^2 + y(t)^2 = \frac{1}{\omega^2}$. Tandis que l'altitude $z(t)$ croit linéairement. On obtient donc une trajectoire hélicoïdale dont voici une petite représentation (pour $\omega = 1$ et jusqu'au temps $t = 30$).



10. On complique un peu les choses en ajoutant un champ de direction Oy,

$$M(0) = \begin{pmatrix} -C_5' + C_6 \\ C_4' + C_7 \\ C_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M'(0) = Y(0) = \begin{pmatrix} \omega C_4' + \frac{1}{B} \\ \omega C_5' \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dont on déduit que,

$$\begin{cases} C_3 &= 1 \\ C_4' &= -\frac{1}{\omega B} \\ C_7 &= \frac{1}{\omega B} \\ C_5' &= \frac{1}{\omega} \\ C_6 &= 1+\frac{1}{\omega} \\ C_8 &= 0. \end{cases}$$

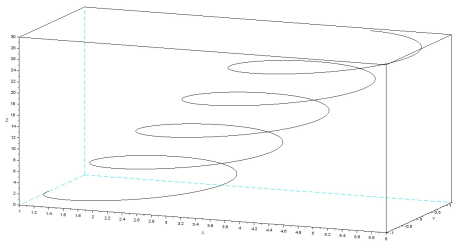
Et on trouve que,

$$\forall t \geqslant 0, \qquad M(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega B}\sin(\omega t) - \frac{1}{\omega}\cos(\omega t) + \frac{t}{B} + 1 + \frac{1}{\omega} \\ -\frac{1}{\omega B}\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega B} \\ t \end{pmatrix}.$$

On remarque toujours que

$$\begin{aligned}\left(x(t) - \left(\frac{t}{B}+1+\frac{1}{\omega}\right)\right)^2 + \left(y(t) - \frac{1}{\omega B}\right)^2 =& \frac{1}{\omega^2B^2}\sin^2(\omega t) + 2\frac{1}{B}\frac{1}{\omega^2}\cos(\omega t)\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2}\cos^2(\omega t) \\ &+ \frac{1}{\omega^2B^2}\cos^2(\omega t) - 2\frac{1}{B}\frac{1}{\omega^2}\cos(\omega t)\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2}\sin^2(\omega t) \\ =& \frac{1}{\omega^2B^2} + \frac{1}{\omega^2}.\end{aligned}$$

Dans le plan xOy on obtient toujours un cercle de rayon fixe $\sqrt{\frac{1}{\omega^2B^2}+\frac{1}{\omega^2}}$ mais dont le centre a son abscisse qui augmente linéairement $\frac{t}{B}+1+\frac{1}{\omega}$. On obtient une hélicoïde penchée.



Une seconde solution (non autorisée dans ce sujet) consiste à repartir de

$$\forall t \geqslant 0, \qquad Y'(t) = \omega A Y(t) + C$$

qui s'exprime encore

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \begin{cases} y_1'(t) &= \omega y_2(t) + \frac{q}{m}E_x \\ y_2'(t) &= \omega y_1(t) + \frac{q}{m}E_y \\ y_3'(t) &= \frac{q}{m}E_z \end{cases}$$

La coordonnée y_3 étant déjà découplée on peut la résoudre directement, quant à y_1 on le dérive une seconde fois (possible puisque y_2 est dérivable, $\omega y_2 + \frac{q}{m}E_x$ est dérivable donc y_1' est dérivable). On obtient,

$$y_1''(t) = \omega y_2'(t) = \omega^2 y_1(t) + \omega\frac{q}{m}E_y.$$

Et l'on se trouve en présence d'une équation du second degré certes mais qui ne dépend plus que de y_1. On sait la résoudre, on trouve y_1 et l'on en déduit (en intégrant ou dérivant) y_2. Sans doute plus rapide que celle proposée par l'énoncé, elle a le gros défaut de ne pas être une méthode générale. En fait elle est équivalente au fait que A^2 est diagonale...

Solution de l'exercice 2.

1. On commence par montrer que E est inclus dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Soit f un élément de E et x un point de $\mathbb{R}$. Alors si y tend vers x par définition, $|x-y| \underset{y\to x}{\longrightarrow} 0$, donc puisque $|f(x)-f(y)| \leqslant L\,|x-y|$ a fortiori, on a $\lim\limits_{y\to x} |f(x)-f(y)| = 0$. Donc f est continue en x, pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.
   Montrons que E est un espace vectoriel. Il est non vide puisque la fonction nulle est L-lipschitzienne, pour tout $L > 0$. Soient λ et μ deux réels et f et g deux éléments de E. Alors la fonction $h = \lambda f + \mu g$ vérifie, pour tout x et y réels,
$$\begin{aligned}|h(x)-h(y)| &= |(\lambda f+\mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(y)| \\ &= |\lambda f(x) - \lambda f(y) + \mu g(x) - \mu g(y)| \\ &\leqslant |\lambda|\,|f(x)-f(y)| + |\mu|\,|g(x)-g(y)|\,.\end{aligned}$$
   Puisque f et g sont deux éléments de E, il existe $L_f > 0$ et $L_g > 0$ telles que $|f(x)-f(y)| \leqslant L_f\,|x-y|$ et $|g(x)-g(y)| \leqslant L_g\,|x-y|$, d'où,
$$|h(x)-h(y)| \leqslant L_f\,|\lambda|\,|x-y| + L_g\,|\mu|\,|x-y| = (|\lambda|\,L_f + |\mu|\,L_g)\,|x-y|\,.$$
   En posant $L_h = |\lambda|\,L_f + |\mu|\,L_g$, on obtient bien que h est L_h-lipschitzienne et est donc dans E.
   NB : Pour les puristes qui ont vu que L est donnée strictement positive dans l'énoncé et que si $\lambda = \mu = 0$ alors $L_h = 0$, précisons que ce n'est pas un vrai problème, dans ce cas on a clairement que la fonction h est la fonction nulle et n'importe quelle constante $L > 0$ convient.
2. Puisque tout fonction f dans E est continue sur le compact $[0,1]$, on sait qu'elle est bornée (et atteint ses bornes). Donc sa norme sup est bien définie. Quant à la seconde partie de N, puisque f est dans E il existe $L > 0$ tel que pour tout $x \neq y$, $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leqslant L$ la borne supérieure associée est donc finie et N est bien définie sur E dans $\mathbb{R}$.
3. Soient λ, μ deux réels, f et g deux éléments de E (en notant toujours L_f et L_g leurs constantes associées). N vérifie les trois propriétés suivantes,
   (a) Puisque $\|.\|_\infty$ est une norme,
$$\begin{aligned}N(\lambda f) &= \|\lambda f\|_\infty + \sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} \frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{|x-y|} \\ &= |\lambda|\,\|f\|_\infty + \sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} |\lambda|\,\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \\ &= |\lambda|\,N(f).\end{aligned}$$
   (b) A nouveau, puisque $\|.\|_\infty$ est une norme et en utilisant la propriété que la borne supérieure d'une somme est plus petite que la somme des bornes supérieures,
$$\begin{aligned}N(f+g) &= \|f+g\|_\infty + \sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} \frac{|(f+g)(x) - (f+g)(y)|}{|x-y|} \\ &\leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} \left(\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} + \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|}\right) \\ &\leqslant N(f) + N(g).\end{aligned}$$

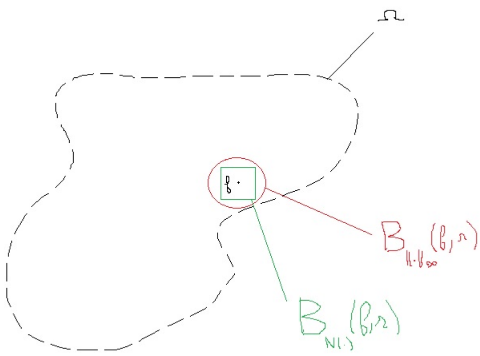
(c) Enfin, si $N(f) = 0$ alors puisque $0 \leqslant \|f\|_\infty \leqslant N(f) \leqslant 0$, on a $\|f\|_\infty = 0$ donc $f = 0$ (rappel pour ce qui doutent, si $\|f\|_\infty = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ et donc $f = 0$).

Finalement N est bien une norme.

4. Soit Ω un ouvert pour $\|.\|_\infty$, c'est-à-dire voisinage de tous ses points pour $\|.\|_\infty$, autrement dit, pour tout $f \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $B_{\|.\|_\infty}(f, r) \subseteq \Omega$ ou encore pour tout $f \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $g \in E$,

$$\text{si } \|f - g\|_\infty < r \text{ alors } g \in \Omega.$$

Montrons que Ω est ouvert pour $N(.)$ c'est-à-dire vérifie la même propriété en remplaçant $\|.\|_\infty$ par $N(.)$. Soit $f \in \Omega$, par ce qui précède, il existe un réel r tel que $B_{\|.\|_\infty}(f, r) \subseteq \Omega$. Montrons que $B_{N(.)}(f, r) \subseteq B_{\|.\|_\infty}(f, r)$ par transitivité on aura l'existence d'un r tel que $B_{N(.)}(f, r) \subseteq \Omega$ et Ω sera bien ouvert pour $N(.)$.



Soit donc $g \in B_{N(.)}(f, r)$ par définition,

$$N(f - g) < r.$$

Or on voit que,

$$\|f - g\|_\infty \leqslant N(f - g) < r,$$

ce qui revient bien à dire que $g \in B_{\|.\|_\infty}(f, r)$. D'où le résultat.
N.B. Dans ce cas le même r marche pour les deux boules. Il aurait été possible que l'on doive modifier la constante r en r' notamment la réduire, pour faire en sorte d'avoir $B_{N(.)}(f, r') \subseteq B_{\|.\|_\infty}(f, r)$.

5. Pour cette question deux solutions possibles.
La première est plus théorique : la formule magique est le théorème des accroissements finis. Puisque que f_n est dérivable (et même $\mathscr{C}^\infty$) sur $[0, 1]$, pour tout x et y dans $[0, 1]$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \sup_{z \in [x,y]} |f_n'(z)| \, |x - y| \leqslant \sup_{z \in [0,1]} |f_n'(z)| \, |x - y| = \sup_{z \in [0,1]} \left| nz^{n-1} \right| |x - y| = n \, |x - y| \, .$$

Donc f_n est n-lipschitzienne, et est donc un élément de E. De plus on vient de montrer que

$$\sup_{(x,y) \in [0,1]^2, \, x \neq y} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|} \leqslant n.$$

La suite est je vous l'accorde plus délicate. Cette borne représente la pente en $x = 1$ et est en réalité optimale. En effet fixons $x = 1$ et considérons $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[0, 1[$ convergeant vers 1 (par exemple $1 - \frac{1}{k}$) alors pour tout k,

$$\sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|} \geqslant \frac{|f_n(1) - f_n(y_k)|}{|1 - y_k|}.$$

Puis par la caractérisation séquentielle de la limite et le fait que le taux de variation converge vers la dérivée,

$$\frac{|f_n(1) - f_n(y_k)|}{|1 - y_k|} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f_n'(1) = n.$$

En passant à la limite dans l'inégalité précédente (le terme de gauche étant constant),

$$\sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|} \geqslant n.$$

Finalement,

$$\sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|} = n.$$

On ajoute que $\|f_n\|_\infty = 1$, pour conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$N(f_n) = n + 1.$$

La seconde solution est ad hoc. On calcul directement

$$\begin{aligned}
\sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|} &= \sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} \frac{|x^n - y^n|}{|x - y|} \\
&= \sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} \frac{\left|(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})\right|}{|x - y|} \\
&= \sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} \left|x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right| \\
&\leqslant 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 = n.
\end{aligned}$$

Dont on déduit que f est dans E. Puis l'on montre à nouveau que cette borne est optimale en prenant $x = 1$ et on voudrait prendre $y = 1$ également. Cependant puisque $x \neq y$ pour calculer la borne supérieure, on prend à nouveau y_k qui tend vers 1. Alors,

$$\sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|} \geqslant \left|1 + y_k + \cdots + y_k^{n-2} + y_k^{n-1}\right| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} n.$$

D'où à nouveau le résultat.

6. Ceci étant dit on peut répondre plus facilement à la question suivante. Procédons par l'absurde, si N était équivalente à $\|.\|_\infty$, alors il existerait une constante α telle que pour tout $f \in E$,

$$N(f) \leqslant \alpha \|f\|_\infty.$$

Notamment, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$N(f_n) = n + 1 \leqslant \alpha \|f_n\|_\infty = \alpha.$$

Ce qui est absurde lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$. Donc N n'est pas équivalente à $\|.\|_\infty$.
N.B. Nous avons malgré tout un sens qui est vrai, pour tout f dans E, on a $\|f\|_\infty \leqslant N(f)$.

7. Cette fois on ne peut pas se passer de l'inégalité des accroissements finis. Si f est dans E_1 alors f' est continue sur le compact $[0,1]$ et nécessairement f' est bornée (et atteint ses bornes). Donc $\|f'\|_\infty$ existe. De plus par le théorème des accroissements finis, pour tout x et y dans $[0,1]$,
$$|f(x)-f(y)| \leqslant \sup_{z\in[x,y]} |f'(z)|\,|x-y| \leqslant \|f'\|_\infty\,|x-y|\,. \tag{3}$$
Donc f est $\|f'\|_\infty$-lipschitzienne et appartient donc à E.
8. N_1 est une norme sans aucune difficulté, soient λ un réel et f une fonction de E_1,
$$N_1(\lambda f) = \|\lambda f\|_\infty + \|(\lambda f)'\|_\infty = |\lambda|\,\|f\|_\infty + |\lambda|\,\|f'\|_\infty = |\lambda|\,N_1(f).$$
De même soient f et g deux fonctions de E_1. Puisque la dérivation est linéaire,
$$N_1(f+g) = \|f+g\|_\infty + \|(f+g)'\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty = N_1(f)+N_1(g)$$
Enfin si $N_1(f)=0$ alors on a toujours $\|f\|_\infty = 0$ et donc $f=0$.
Pour finir cet exercice et montrer que pour $f\in E_1$, $N_1(f)=N(f)$ il s'agit de montrer que
$$\sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = \|f'\|_\infty\,.$$
On a déjà montrer un sens par (3). Montrons la réciproque, il s'agit du même principe que dans la question 5 traité ici directement sans passer par la caractérisation séquentielle. Soit $a\in[0,1]$,
$$|f'(a)| = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{|f(a+h)-f(a)|}{|h|}$$
Or $\forall h\neq 0$ et de sorte que $x+h\in[0,1]$,
$$\frac{|f(a+h)-f(a)|}{|h|} \leqslant \sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$
Donc par passage à la limite,
$$|f'(a)| \leqslant \sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$
Ceci étant vrai pour tout $a\in[0,1]$, le majorant ne dépendant pas de a, on trouve que,
$$\|f'\|_\infty \leqslant \sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$
Et on conclut que,
$$\|f'\|_\infty = \sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$

Solution de l'exercice 3.

1. Comme vu en séance de TD, on revient à la définition, on développe f et on détermine qui est petit devant qui, $\forall X\in\mathbb{R}^n,\ \forall H\in\mathbb{R}^n$,
$$\begin{aligned} f(X+H)-f(X) &= \|A(X+H)-B\|^2 - \|AX-B\|^2 \\ &= \|AX-B+AH\|^2 - \|AX-B\|^2 \\ &= \|AX-B\|^2 + 2\,\langle AX-B, AH\rangle + \|AH\|^2 - \|AX-B\|^2 \\ &= 2\,\langle AX-B, AH\rangle + \|AH\|^2\,. \end{aligned}$$

D'une part l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui a tout $H \in \mathbb{R}^n$ associe $2\langle AX - B, AH\rangle$ est linéaire. D'autre part, le terme $\|AH\|^2$ est négligeable,

$$\frac{\|AH\|^2}{\|H\|} = \left\| A\frac{H}{\sqrt{\|H\|}} \right\|^2.$$

Or

$$\left\| \frac{H}{\sqrt{\|H\|}} \right\| = \sqrt{\|H\|} \underset{H\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $\frac{H}{\sqrt{\|H\|}} \underset{H\to 0}{\longrightarrow} 0$ et donc (la multiplication à gauche par une matrice est continue)

$$\frac{\|AH\|^2}{\|H\|} = \left\| A\frac{H}{\sqrt{\|H\|}} \right\|^2 \underset{H\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi par définition,

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \forall H \in \mathbb{R}^n, \qquad Df(X).H = 2\langle AX - B, AH\rangle.$$

2. Si f est minimale en X_0 alors

$$\forall H \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 = Df(X_0).H = 2\langle AX_0 - B, AH\rangle = 2^t(AX_0 - B)AH = 2^tX_0{}^tAAH - 2^tBAH.$$

Donc

$$\forall H \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 = {}^tX_0{}^tAAH - {}^tBAH = {}^t\left({}^tAAX_0 - {}^tAB\right)H = \left\langle {}^tAAX_0 - {}^tAB, H\right\rangle.$$

Ainsi le vecteur ${}^tAAX_0 - {}^tAB$ est orthogonal à tous les vecteurs et est donc nul. Résultat classique, pour ceux qui doutent, puisque c'est vrai pour tout les vecteurs, il est notamment orthogonal à lui même : en choisissant $H = {}^tAAX_0 - {}^tAB$, on trouve $0 = \langle {}^tAAX_0 - {}^tAB, {}^tAAX_0 - {}^tAB\rangle = \|{}^tAAX_0 - {}^tAB\|^2$. Donc,

$${}^tAAX_0 = {}^tAB.$$

3. Réciproquement (c'est moins classique) si ${}^tAAX_0 = {}^tAB$, alors on a toujours,

$$\forall H \in \mathbb{R}^n, \qquad Df(X_0).H = 2\left\langle {}^tAAX_0 - {}^tAB, H\right\rangle = 0.$$

Donc par le développement limité de la question 1,

$$\forall H \in \mathbb{R}^n, \qquad f(X_0 + H) = f(X_0) + Df(X_0).H + \|AH\|^2 = f(X_0) + \|AH\|^2 \geqslant f(X_0).$$

Ce qui est l'exact définition d'un minimum (ici global car l'inégalité est vrai pour tout H et non juste H petit).

Solution de l'exercice 4.

1. Comme toujours, X_1 est une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre θ_1,

$$X_1 = \theta_1\delta_1 + (1-\theta_1)\delta_0 \sim b(\theta_1),$$

dont l'espérance vaut

$$\mathbb{E}(X_1) = 1\theta_1 + 0(1-\theta_1) = \theta_1.$$

et la variance,

$$\operatorname{Var}(X_1) = \mathbb{E}\left(X_1^2\right) - (\mathbb{E}X_1)^2 = 1^2\theta_1 + 0^2(1-\theta_1) - \theta_1^2 = \theta_1(1-\theta_1).$$

2. On suppose la suite $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n_1}$ identiquement distribuée, chaque X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre θ_1 (ce qui implique par exemple que la machine ne vieillit pas durant l'expérience). De même la suite $(Y_j)_{1\leqslant j\leqslant n_2}$ est supposée identiquement distribuée, suivant une loi de Bernoulli de paramètre θ_2. Enfin on suppose que toutes ces variables aléatoires sont indépendantes deux à deux (les X_i entre elles, les Y_j entre elles et les X_i avec les Y_j).
3. Puisque l'on ne compte que les pièces défectueuses, sinon X_i vaut 0, X représente le nombre total de pièces défectueuses de la machine A et Y celui de la machine B. Puisque X est une somme de lois de Bernoulli indépendantes, sa loi est une binomiale de paramètre n_1 et θ_1 :
$$X = \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k} \theta_1^k (1-\theta_1)^{n_1-k}\delta_k \sim \mathscr{B}(n_1, \theta_1)$$
Puisque les X_i sont identiquement distribués,
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n_1} \mathbb{E}(X_i) = n_1 \mathbb{E}(X_1) = n_1\theta_1.$$
Puisque les X_i sont indépendants et uniquement parce c'est le cas, la variance de la somme est égale à la somme des variances,
$$\operatorname{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n_1} \operatorname{Var}(X_i) = n_1 \operatorname{Var}(X_1) = n_1\theta_1(1-\theta_1).$$
4. L'hypothèse nulle est l'événement où la machine A a une probabilité plus grande de produire une pièce défectueuse que la machine B, $H_0 : \{\theta_1 > \theta_2\}$.
5. L'estimateur naturelle de θ_1 est $\bar{X}_{n_1} = \frac{X}{n_1}$. Puisque X_1 est intégrable, d'après la loi forte des grands nombres,
$$\bar{X}_{n_1} \underset{n_1\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X_1) = \theta_1.$$
Donc $\bar{X}_{n_1}$ est consistant. Son espérance vaut,
$$\mathbb{E}\left(\bar{X}_{n_1}\right) = \frac{\mathbb{E}(X)}{n_1} = \theta_1.$$
C'est donc un estimateur sans biais.
6. Puisque $\bar{Y}_{n_2}$ approche θ_2 et $\bar{X}_{n_1}$ approche θ_1, on rejette H_0 lorsque Y est trop grand par rapport à X, si la machine B rejette trop de pièce défectueuses par rapport à la machine A alors au delà d'un certain seuil, il est fortement probable que ce soit la machine B qui soit la plus défectueuse. Donc,
$$R := \{\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2} \leqslant x_\alpha\}.$$
7. D'après le théorème central limite (X_i, i.i.d. de loi dont l'espérance et la variance existe), on a la convergence en loi suivante,
$$\frac{\sqrt{n_1}\left(\bar{X}_{n_1} - \mathbb{E}(X_1)\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X_1)}} = \frac{\sqrt{n_1}\left(\bar{X}_{n_1} - \theta_1\right)}{\sqrt{\theta_1(1-\theta_1)}} \underset{n_1\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} N_1,$$
où $N_1 \sim \mathscr{N}(0,1)$. Donc pour n_1 assez grand et de même pour $\bar{Y}_{n_2}$ et n_2 assez grand,
$$\bar{X}_{n_1} \simeq \frac{N_1\sqrt{\theta_1(1-\theta_1)}}{\sqrt{n_1}} + \theta_1 \qquad \text{et} \qquad \bar{Y}_{n_2} \simeq \frac{N_2\sqrt{\theta_2(1-\theta_2)}}{\sqrt{n_2}} + \theta_2,$$
où $N_2 \sim \mathscr{N}(0,1)$. Puisque tous les X_i sont indépendants de tous les Y_j alors N_1 est indépendant de N_2.

8. C'est suggéré, on calcul sa fonction caractéristique (avec la bonne formule $\varphi_N(t) = e^{itm}e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$). Posons $Z_1 = \frac{N_1\sqrt{\theta_1(1-\theta_1)}}{\sqrt{n_1}} + \theta_1$ et $Z_2 = \frac{N_2\sqrt{\theta_2(1-\theta_2)}}{\sqrt{n_2}} + \theta_2$. Alors,

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_1}(t) &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{itZ_1}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{it\frac{N_1\sqrt{\theta_1(1-\theta_1)}}{\sqrt{n_1}}+it\theta_1}\right)\\ &= \mathrm{e}^{it\theta_1}\,\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{i\tilde{t}N_1}\right)\end{aligned}$$

avec $\tilde{t} = t\frac{\sqrt{\theta_1(1-\theta_1)}}{\sqrt{n_1}} \in \mathbb{R}$. Donc par le rappel et puisque $N_1 \sim \mathscr{N}(0,1)$,

$$\varphi_{Z_1}(t) = \mathrm{e}^{it\theta_1}\,\mathrm{e}^{-\frac{\tilde{t}^2}{2}} = \mathrm{e}^{it\theta_1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}\left(\frac{\sqrt{\theta_1(1-\theta_1)}}{\sqrt{n_1}}\right)^2}.$$

Or la fonction caractéristique caractérise la loi, donc

$$Z_1 \sim \mathscr{N}\left(\theta_1, \frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1}\right).$$

On a exactement de même, $Z_2 \sim \mathscr{N}\left(\theta_2, \frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}\right)$.

9. Encore une fois grâce à la fonction caractéristique,

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{itZ}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{it(Z_1-Z_2)}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{itZ_1}\,\mathrm{e}^{-itZ_2}\right).$$

Or les variables Z_1 et Z_2 sont indépendantes (car N_1 et N_2 le sont), donc,

$$\begin{aligned}\varphi_Z(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{itZ_1}\,\mathrm{e}^{-itZ_2}\right) &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{itZ_1}\right)\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-itZ_2}\right)\\ &= \mathrm{e}^{it\theta_1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}\left(\frac{\sqrt{\theta_1(1-\theta_1)}}{\sqrt{n_1}}\right)^2}\,\mathrm{e}^{-it\theta_2}\,\mathrm{e}^{-\frac{(-t)^2}{2}\left(\frac{\sqrt{\theta_2(1-\theta_2)}}{\sqrt{n_2}}\right)^2}\\ &= \mathrm{e}^{it(\theta_1-\theta_2)}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}\left(\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1}+\frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}\right)}\end{aligned}$$

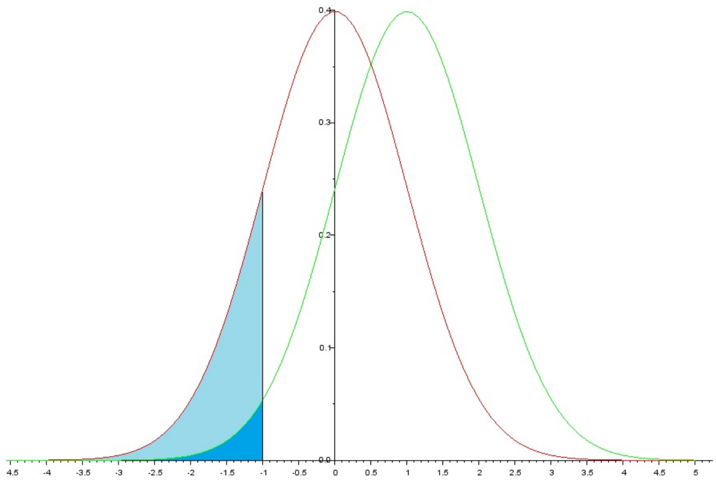
Ainsi Z est encore une loi normale :

$$Z \sim \mathscr{N}\left(\theta_1-\theta_2, \frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1} + \frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}\right).$$

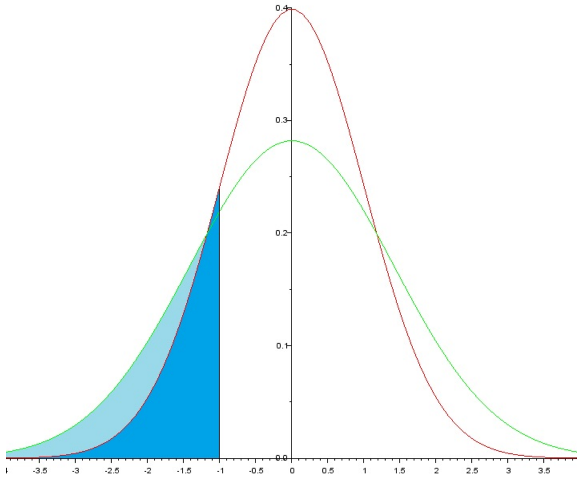
10. On cherche à majorer

$$\sup_{0\leqslant\theta_2<\theta_1\leqslant 1} \mathbb{P}_{(\theta_1,\theta_2)}(Z \leqslant x_\alpha).$$

Pour que l'événement R_1 se réalise avec une grande probabilité, il est préférable que sa moyenne soit petite. Par exemple on fixe $\sigma^2 = 1$, et l'on fait trace en rouge la densité pour une moyenne $m = 0$ et en vert pour une moyenne $m = 1$. L'aire sous la courbe en bleu représente la probabilité pour que la gaussienne soit plus petite que x_α avec ici $x_\alpha = -1$. Dans le cas où x_α est négatif, on voit que l'aire est plus grande dans le cas de la courbe en rouge, c'est à dire dans le cas où la moyenne est plus petite. Donc on veut $\theta_1 - \theta_2$ petit mais sous $0 \leqslant \theta_2 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$, on a $\theta_1 - \theta_2 \geqslant 0$. Donc la borne supérieure est atteinte pour $\theta_1 = \theta_2$.



11. Puisque x_α est négatif et que la moyenne de la gaussienne a été choisie nulle, il vaut mieux que cette gaussienne soit faiblement concentrée autour de sa moyenne pour qu'avec une bonne probabilité elle se trouve au delà de x_α. L'aire en bleu est plus grande ici pour la gaussienne bleue qui correspond à $\sigma^2 = 2$ contre la gaussienne rouge qui correspond à $\sigma^2 = 1$, pour une même moyenne $m = 0$.



On souhaite donc maximiser sa variance qui vaut (puisque $\theta_2 = \theta_1$), $\theta_1(1-\theta_1)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)$. Cette fonction de θ_1 sur $[0,1]$ est maximale pour $\theta_1 = 1/2$. Ainsi on dira (sans l'avoir rigoureusement démontré) que, avec $N \sim \mathcal{N}(0,1)$,

$$\sup_{0\leqslant\theta_2<\theta_1\leqslant 1} \mathbb{P}_{(\theta_1,\theta_2)}(Z \leqslant x_\alpha) = \mathbb{P}_{\left(\theta_1=\theta_2=\frac{1}{2}\right)}(Z \leqslant x_\alpha) = \mathbb{P}\left(N \leqslant 2x_\alpha\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}\right).$$

12. Comme digestif, un petit calcul donne,

$$x_\alpha = \frac{-1.645\sqrt{n_1+n_2}}{2\sqrt{n_1 n_2}} = \frac{-1.645\sqrt{2700+1600}}{2\sqrt{2700*1600}} = -0.026.$$

13. Il s'agit de dire si l'on se trouve dans la zone R de rejet ou non. Notez que tout le gros du travail était de déterminer ce R et notamment ce x_α pour une erreur $\alpha = 5\%$, obtenu en approchant R par R_1. Ici, $\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2} = \frac{50}{2700} - \frac{35}{1600} \simeq -0.003 > -0.026$. Nous ne sommes donc pas dans la zone de rejet, on ne rejette pas H_0 (et ce malgré le fait que $\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2} < 0$, rigolo non ?).